OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V – a

PROBLEMA 1. Suma a cinci numere naturale distincte două câte două este 575. Ştiind că suma diferenţelor dintre cel mai mare dintre ele şi fiecare dintre celelalte 4 numere este 10, aflaţi cele 5 numere.

Barem de corectare.

Varianta 1. Metoda figurativă

Desen .... $(2p)$

Paşi intermediari .... $(3p)$

Finalizare .... $(2p)$

Varianta 2.

Fie $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Avem $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 575$ şi

$(a_5 - a_1) + (a_5 - a_2) + (a_5 - a_3) + (a_5 - a_4) = 10$ .... $(1p)$

Obţinem că $4 \cdot a_5 = 10 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ .... $(1p)$

Deci $4 \cdot a_5 = 10 + 575 - a_5$ .... $(1p)$

Rezultă că $a_5 = 117$ .... $(1p)$

Obţinem $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 458$ .... $(1p)$

Avem că $113 + 114 + 115 + 116 = 458$ şi numerele distincte .... $(1p)$

Rezultă că $a_1 = 113$, $a_2 = 114$, $a_3 = 115$, $a_4 = 116$ .... $(1p)$

PROBLEMA 2. Să se afle numerele naturale x ştiind că, adunând x cu suma cifrelor lui x se obţine 2018.

Barem de corectare.

$x < 999$ nu convine .... $(1p)$

Fie $x = \overline{abcd}$. Avem $\overline{abcd} + a + b + c + d = 2018$, deci a poate fi doar 1 sau 2 .... $(1p)$

Dacă $a = 1$ obţinem $1001 + 101b + 11c + 2d = 2018$

$b < 9$ nu convine, deci $b = 9$ .... $(1p)$

Avem $11c + 2d = 108$, deci c este par, adică $c < 9$, deci $d > 9$, adică nu există soluţie ... $(1p)$

Dacă $a = 2$ avem $b = 0$ .... $(1p)$

Avem $11c + 2d = 16$, deci c este par, adică $c = 0$ .... $(1p)$

Obţinem $d = 8$, deci $x = 2008$ .... $(1p)$

PROBLEMA 3. Pe un monitor apare scris un număr natural. Prin **pas** se înţelege înlocuirea numărului de pe monitor, cu suma dintre produsul cifrelor sale şi 23. Se ştie că primul număr care apare pe monitor este 23.

a) Aflaţi ce număr este scris pe monitor după 10 paşi.

b) Aflaţi care este al 2018-lea număr care apare pe monitor.

Barem de corectare.

a) Primii zece paşi sunt:

	Pasul 1	Pasul 2	Pasul 3	Pasul 4	Pasul 5
23	$2 \cdot 3 + 23 = 29$	$2 \cdot 9 + 23 = 41$	$4 \cdot 1 + 23 = 27$	$2 \cdot 7 + 23 = 37$	$3 \cdot 7 + 23 = 44$

Pasul 6	Pasul 7	Pasul 8	Pasul 9	Pasul 10
$4 \cdot 4 + 23 = 39$	$3 \cdot 9 + 23 = 50$	$5 \cdot 0 + 23 = 23$	$2 \cdot 3 + 23 = 29$	$2 \cdot 9 + 23 = 41$

Deci după 10 paşi, pe monitor apare numărul 41 .... $(3p)$

b) Se observă că numărul 23 apare din nou după 8 paşi .... $(2p)$

Deoarece $2018 = 8 \cdot 252 + 2$ .... $(1p)$

al 2018-lea număr care apare pe monitor este 29 .... $(1p)$

PROBLEMA 4. Se consideră numerele a şi b,

$$a = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + ... + 2017 \cdot 2018$$
$$b = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + ... + 2018 \cdot 2019.$$

a) Aflaţi ultima cifră a numărului $b - a$.

b) Arătaţi că numărul $a + b + 2018$ nu este pătrat perfect.

Barem de corectare.

a) $b - a = (2 \cdot 3 - 1 \cdot 2) + (4 \cdot 5 - 3 \cdot 4) + ... + (2018 \cdot 2019 - 2017 \cdot 2018)$
$= 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + ... + 2018 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 1009)$
$= 4 \cdot 1009 \cdot 505$ .... $(3p)$

Ultima cifră a lui $b - a$ este 0 .... $(1p)$

b) $a + b = (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3) + (3 \cdot 4 + 4 \cdot 5) + ... + (2017 \cdot 2018 + 2018 \cdot 2019)$
$= 2 \cdot 4 + 4 \cdot 8 + 6 \cdot 12 + ... + 2018 \cdot 4036 = 2 \cdot 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 1009^2)$ .... $(1p)$

Numărul $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 1009^2$ are ultima cifră 5 .... $(1p)$

Numărul $a + b + 2018$ are ultima cifră 8, deci nu este pătrat perfect .... $(1p)$

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI – a

PROBLEMA 1. Să se determine $x, y, z \in \mathbb{N}$, $z \neq 0$, pentru care $x + \dfrac{1}{y + \dfrac{1}{z}} = \dfrac{30}{13}$.

Barem de corectare.

Din ecuaţie se deduce că x este partea întreagă a numărului $\dfrac{30}{13}$, deci $x = 2$ .... $(3p)$

Rezultă că $y + \dfrac{1}{z} = \dfrac{13}{4}$, de unde obţinem $y = 3$, $z = 4$ .... $(4p)$

PROBLEMA 2. Se consideră numerele naturale $a = 5n + 6$, $b = 4n + 5$ şi $c = n + 1$, unde $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că:

a) $[b, c] = b \cdot c$;

b) $(a, b) + (a, c)$ este număr par.

$[x, y]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun a numerelor x şi y, iar (x, y) reprezintă cel mai mare divizor comun a numerelor x şi y.

Barem de corectare.

a) Demonstrăm că, $(b, c) = 1$. Într-adevăr, dacă $(b, c) = d$, atunci

$$\begin{cases} d \,|\, b \\ d \,|\, c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \,|\, 4n+5 \\ d \,|\, n+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \,|\, 4n+5 \\ d \,|\, 4n+4 \end{cases} \Rightarrow d \,|\, ((4n+5) - (4n+4)) = 1 \text{ .... } (3p)$$

Deci $[b, c] = \dfrac{b \cdot c}{(b, c)} = b \cdot c$ .... $(1p)$

b) Din $(a, b) = (a, c) = 1$ .... $(2p)$

obţinem că $(a, b) + (a, c) = 2$, adică un număr par .... $(1p)$

PROBLEMA 3. Fie ABC un triunghi oarecare. Construim în exteriorul său triunghiurile isoscele MAB şi NAC cu $[AB] \equiv [AM]$ şi $[AC] \equiv [AN]$, astfel încât $[MC] \equiv [BN]$. Demonstraţi că $\widehat{BAM} \equiv \widehat{CAN}$.

Barem de corectare.

Se arată că $\Delta AMC \equiv \Delta ABN$ $(L.L.L.)$, de unde $\widehat{MAC} \equiv \widehat{BAN}$ .... $(3p)$

Observăm că $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{MAC}) - m(\widehat{BAC})$ şi $m(\widehat{CAN}) = m(\widehat{BAN}) - m(\widehat{BAC})$, .. $(3p)$

de unde $\widehat{MAB} \equiv \widehat{CAN}$ .... $(1p)$

PROBLEMA 4. Considerăm unghiurile $\widehat{A_1OA_2}$, $\widehat{A_2OA_3}, \ldots, \widehat{A_nOA_{n+1}}$, $\widehat{A_{n+1}OA_1}$, în jurul unui punct O, astfel încât $m(\widehat{A_1OA_2}) = 1^\circ$, $m(\widehat{A_2OA_3}) = 2^\circ$, $m(\widehat{A_3OA_4}) = 3^\circ$, $\ldots$, $m(\widehat{A_nOA_{n+1}}) = n^\circ$, $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $m(\widehat{A_{n+1}OA_1}) = 9^\circ$, aflaţi numărul n.

Barem de corectare.

Din $1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + \ldots + n^\circ + 9^\circ = 360^\circ$ .... $(2p)$

obţinem $\dfrac{n(n+1)}{2} = 351$ .... $(2p)$

adică $n(n+1) = 702$ .... $(1p)$

Deci $n = 26$ .... $(2p)$

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII – a

PROBLEMA 1. Determinati perechile (a, b) de numere naturale cu $a \geq b$, pentru care numărul $A = \dfrac{a-b}{1+ab}$ este natural.

Barem de corectare.

Dacă $a = b$, atunci $A = 0$, deci $(a, b) \in \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ .... (2p)

Dacă $a > b$, atunci $\dfrac{a-b}{1+ab} > 0$ .... (1p)

Dacă $a > b = 0$, atunci $A = a \in \mathbb{N}^*$, deci $(a, b) \in \{(n, 0) : n \in \mathbb{N}^*\}$ .... (1p)

Dacă $a > b > 0$, atunci $0 < \dfrac{a-b}{1+ab} < 1$. Într-adevăr, $\dfrac{a-b}{1+ab} < 1 \Leftrightarrow a - b < 1 + ab \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a < 1 + (a+1)\, b$, ceea ce este adevarat.. (3p)

PROBLEMA 2. a) Să se demonstreze că, dacă a şi b sunt două numere raţionale pozitive cu $a < b$, atunci $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{\sqrt{a \cdot b}} < \dfrac{1}{a}$;

b) Să se arate că $\dfrac{2}{3} < \left(\sqrt{6}\right)^{-1} + \left(\sqrt{15}\right)^{-1} + \left(\sqrt{35}\right)^{-1} < \dfrac{16}{15}$.

Barem de corectare.

a) Deoarece $0 < a < b$, avem:

$\sqrt{a \cdot b} > \sqrt{a \cdot a} = a \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{a \cdot b}} < \dfrac{1}{a}$ .... (1p)

$\sqrt{a \cdot b} < \sqrt{b \cdot b} = b \Rightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{\sqrt{a \cdot b}}$ .... (1p)

de unde, $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{\sqrt{a \cdot b}} < \dfrac{1}{a}$ .... (1p)

b) Deoarece $\left(\sqrt{6}\right)^{-1} + \left(\sqrt{15}\right)^{-1} + \left(\sqrt{35}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5 \cdot 7}}$, pe baza punctului precedent, avem: $\dfrac{71}{105} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} < \dfrac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5 \cdot 7}} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{31}{30}$.... (2$p$)

Dar, cum $\dfrac{2}{3} < \dfrac{71}{105}$ şi $\dfrac{31}{30} < \dfrac{16}{15}$, obţinem inegalitatea cerută.......................... (2p)

PROBLEMA 3. În triunghiul ABC, fie D mijlocul laturii (AC), iar $(DE$ şi $(DF$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ADB$, respectiv $\sphericalangle CDB$ $(E \in (AB)\,,\ F \in (BC))$. Arătaţi că, dacă $EF \cap DB = \{M\}$, atunci $EF = 2 \cdot MD$.

Barem de corectare.

Din Teorema bisectoarei în triunghiurile ADB şi CDB, avem că $\dfrac{BE}{EA} = \dfrac{BD}{DA} = \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{FB}{FC}$, de unde rezultă că $EF \| AC$ .... (2p)

Astfel, deoarece $\sphericalangle MED \equiv \sphericalangle EDA \equiv \sphericalangle MDE$, rezultă că triunghiul MED este isoscel şi $ME = MD$ .... (2p)

Analog, din triunghiul MFD, se obţine că $MF = MD$ .... (2p)

Aşadar, $EF = ME + MF = 2 \cdot DM$ .... (1p)

PROBLEMA 4. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$. Fie D mijlocul laturii (BC), M mijlocul segmentului (AD), N piciorul perpendicularei din D pe BM şi E simetricul lui B faţă de M. Arătaţi că:

a) $ADCE$ este dreptunghi;

b) $m(\sphericalangle ANC) = 90°$.

Barem de corectare.

a) Cum $[EM] \equiv [BM]$ şi $[AM] \equiv [MD]$, rezultă că $ABDE$ este paralelogram, de unde obţinem că $[DC] \equiv [AE]$ şi $BD \| AE$ .... (2p)

Deoarece $AD \perp BC$, rezultă că $ADCE$ este dretunghi .... (1p)

b) Fie F punctul de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului $ADCE$. Deoarece triunghiul DNE este dreptunghic, iar $[NF]$ este mediana corespunzătoare ipotenuzei $[DE]$, avem că $NF = \dfrac{DE}{2} = \dfrac{AC}{2}$ .... (2p)

de unde rezultă că triunghiul ANC este dreptunghic cu $m(\sphericalangle ANC) = 90°$ .... (2p)

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII – a

PROBLEMA 1.

a) Să se demostreze că $(x+y+z)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$, oricare ar fi $x,y,z\in(0,\infty)$;

b) Fie numerele reale $x,y,z\geq 1$, astfel încât $x+y+z=6$.Arătaţi că

$$\frac{x^2+3}{3x^2+1}+\frac{y^2+3}{3y^2+1}+\frac{z^2+3}{3z^2+1}\geq\frac{3}{2}.$$

Barem de corectare.

a) $(x+y+z)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\geq 9$ .... $(3p)$

b) Din punctul a) rezultă că $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}=\frac{3}{2}$ .... $(2p)$

Deoarece $\frac{a^2+3}{3a^2+1}\geq\frac{1}{a}\Leftrightarrow(a-1)^3\geq 0$, ceea ce este adevărat pentru $a\geq 1$, ... $(1p)$

avem $\frac{x^2+3}{3x^2+1}+\frac{y^2+3}{3y^2+1}+\frac{z^2+3}{3z^2+1}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{3}{2}$ .... $(1p)$

PROBLEMA 2. Se consideră expresia $E(x)=3x^3+9x^2+6x+2$, unde $x\in\mathbb{N}$.

a) Să se arate că pentru orice număr natural x, expresia x^3+3x^2+2x se poate scrie ca produs de trei numere naturale consecutive.

b) Să se demonstreze că nu există $x\in\mathbb{N}$ pentru care $E(x)$ să fie cub perfect.

Barem de corectare.

a) $x^3+3x^2+2x=x(x+1)(x+2)$ .... $(3p)$

b) Deoarece $E(x)=3\cdot x(x+1)(x+2)+2$ şi $3\mid x(x+1)(x+2)$, rezultă că $E(x)$ este de forma $9n+2$, $n\in\mathbb{N}$ .... $(2p)$

Un număr natural poate fi de forma $3k$, $3k+1$ sau $3k+2$. Deoarece $(3k)^3=9\cdot 3k$, $(3k+1)^3=9\cdot k\left(3k+3k^2+1\right)+1$, iar $(3k+2)^3=9\cdot k\left(6k+3k^2+4\right)+8$, rezultă că $E(x)$ nu este cubul niciunui număr natural .... $(2p)$

PROBLEMA 3. Se consideră o piramidă regulată $VABCD$ cu $VO = AB = 12cm$, unde O este centrul bazei. Fie punctul M proiecţia punctului O pe CV, punctul N mijlocul segmentului $[BC]$, iar punctul G centrul de greutate al triunghiului VAD.

a) Să se demonstreze că $\dfrac{VM}{MC} = 2$.

b) Să se afle distanţa de la punctul M la planul (VBD).

c) Să se demonstreze că punctele M, N, G şi A sunt coplanare.

Barem de corectare.

a) Din $VO^2 = VM \cdot CV$ şi $CO^2 = CM \cdot CV$, rezultă că $\dfrac{VM}{MC} = \dfrac{VO^2}{CO^2} = \dfrac{144}{72} = 2$ .... $(3p)$

b) Demonstrarea faptului că $CA \perp (VBD)$ .... $(1p)$

Fie $T = pr_{(VBD)}M \Rightarrow d(M, (VBD)) = MT$. Deoarece $pr_{(VBD)}V = V$, $pr_{(VBD)}C = O$, iar puntele V, M, C sunt coliniare, rezultă că V, T, O sunt coliniare şi $MT \parallel CO$. Din $\Delta VTM \sim \Delta VOC$ obţinem că $\dfrac{MT}{CO} = \dfrac{VM}{CV} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow MT = 4\sqrt{2}cm$ .... $(1p)$

c) Fie F mijlocul segmentului (AD). Deoarece G este centrul de greutate al triunghiului VAD, rezultă că $\dfrac{VG}{GF} = 2 \Rightarrow \dfrac{VG}{GF} = \dfrac{VM}{MC} \Rightarrow MG \parallel CF$ .... $(1p)$

Din $CN = AF$ şi $CN \parallel AF$, rezultă că $ANCF$ este paralelogram, de unde $AN \parallel CF$. Deci $AN \parallel MG$.. $(1p)$

PROBLEMA 4. Fie trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $\dfrac{AB}{CD} = \sqrt{3}$ şi $\{Q\} = AD \cap BC$. Prin Q se construieşte perpendiculara MQ pe planul (ABC). Ştiind că $m(\sphericalangle((MAB), (ABC))) = 30^o$, să se afle $m(\sphericalangle((MAB), (MCD)))$.

Barem de corectare. Fie $QL \perp AB$, $L \in (AB)$ şi $\{K\} = DC \cap QL$. Avem:

$\dfrac{QK}{QL} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ .... $(2p)$

$MQ \perp (ABC)$, $QK \perp CD$, $QK, CD \subset (ABC) \Rightarrow MK \perp CD$. Analog, se obţine $ML \perp AB$ .... $(2p)$

$(MAB) \cap (ABC) = AB$, $QL \perp AB, ML \perp AB, QL \subset (ABC), ML \subset (MAB)$, deci $m(\sphericalangle((MAB), (ABC))) = m(\sphericalangle MLQ) = 30^o$.. $(1p)$

Deci $\dfrac{MQ}{QL} = \operatorname{tg} 30^o = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow MQ = QK \Rightarrow \Delta MQK$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle MKQ) = 45^o \Rightarrow m(\sphericalangle KML) = 15^o$ .... $(1p)$

Dacă $d = (MAB) \cap (MCD)$, atunci $AB \parallel CD \Rightarrow d \parallel AB \parallel CD \Rightarrow MK \perp d,\ ML \perp d \Rightarrow m(\sphericalangle((MAB), (MCD))) = m(\sphericalangle KML) = 15^o$ .... $(1p)$

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX – a

PROBLEMA 1. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale, următoarele ecuaţii:

a) $x[x] + x\{x\} + \{x\}[x] = x^2 + [x]^2 + \{x\}^2$;

b) $\{x\} + \dfrac{1}{\{x\}} = [x] + \dfrac{1}{[x]}$.

$\{x\}$ şi $[x]$ reprezintă partea fracţionară, respectiv partea întreagă a numărului real x.

Barem de corectare.

a) $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca \Leftrightarrow a=b=c$; prin urmare $x=[x]=\{x\}$ şi obţinem $x \in \mathbb{Z} \cap [0,1) = \{0\}$ singura soluţie. . . . . (4p)

b) Condiţii: $\{x\} \neq 0$ şi $[x] \neq 0$ deci $x \notin \mathbb{Z}$ şi $x \notin [0,1]$ . . . . (1p)

Se obţine ecuaţia $(\{x\} - [x])(\{x\}[x] - 1) = 0$. . . . . (1$p$)

Avem $\{x\} = [x]$ cu $x = 0$ respectiv $\{x\} = \dfrac{1}{[x]}$ cu $[x] = k \in \mathbb{Z}$. Din $x = [x] + \{x\}$ şi condiţii obţinem mulţimea soluţiilor $\left\{ x = k + \dfrac{1}{k} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\} \right\}$ . . . . (1p)

PROBLEMA 2. Arătaţi că oricare ar fi numerele reale x şi y, au loc următoarele inegalităţi:

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Barem de corectare.

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} - \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{1}{1+|x|+|y|} - \frac{1}{1+|x+y|} = \frac{|x+y|-|x|-|y|}{(1+|x|+|y|)(1+|x+y|)} \leq 0 \ (4p)$$

$$\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3p)$$

PROBLEMA 3.

a) Demonstraţi că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate, dacă şi numai dacă $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{0}$.

b) Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $M\in(BC), N\in(CA), P\in(AB)$ astfel încât $\dfrac{BM}{BC}=m$, $\dfrac{CN}{CA}=n$, $\dfrac{AP}{AB}=p$.Se notează cu G şi G' centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, respectiv MNP. Arătaţi că:

i) Punctul G' se află pe mediana din A a triunghiului ABC, dacă şi numai dacă $n+p=2m$.

ii) Punctele G şi G' coincid, dacă şi numai dacă $m=n=p$.

Barem de corectare.

a) Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Avem $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GC'}=\overrightarrow{0}$. .... $(1p)$

Reciproc, fie G centrul de greutate al triunghiului ABC, deci $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{0}$. Obţinem $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'G}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'G}=\overrightarrow{0}$, de unde avem $\overrightarrow{A'G}+\overrightarrow{B'G}+\overrightarrow{C'G}=\overrightarrow{0}$, deci G este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$. .... $(1p)$

b) i) Fie A' mijlocul segmentului $[BC]$. Avem $G'\in AA'\Leftrightarrow\overrightarrow{AG'}$ şi $\overrightarrow{AA'}$ sunt coliniari. Din $\overrightarrow{AA'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AG'}=\dfrac{1-m+p}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{1-n+m}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$ şi $1-m+p=1-n+m$ obţinem $n+p=2m$. .... $(3p)$

ii) Punctele G şi G' coincid $\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow(p-m)\overrightarrow{AB}+(m-n)\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow$ $m=n=p$. .... $(2p)$

PROBLEMA 4. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir cu $x_0=0$, $x_1=1$ şi $2x_n+3x_{n+2}\leq 5x_{n+1},\forall\ n\geq 0$. Arătaţi că pentru orice număr natural n are loc inegalitatea:

$$x_n\leq 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

Barem de corectare.

$3(x_{n+2}-x_{n+1})\leq 2(x_{n+1}-x_n)$; adunăm inegalităţile scrise pentru $n=0,1,\ldots,n-2$ şi obţinem $3x_n-2x_{n-1}-3x_1+2x_0\leq 0$ şi $3x_n\leq 2x_{n-1}+3$. .... $(4p)$

Inegalitatea cerută se demonstrează prin inducţie, observând că $x_n\leq\dfrac{2}{3}x_{n-1}+1$. ..... $(3p)$

---

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X – a

PROBLEMA 1. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} |z-1-i| \leq \sqrt{2} \\ |z-3+i| = |z-1-i| \\ |z-3+i| \geq \sqrt{2} \end{cases}$, unde $z \in \mathbb{C}$.

Barem de corectare. Notăm cu $C((a,b),r)$ şi $D((a,b),r)$, cercul, respectiv discul cu centrul în punctul de coordonate (a,b) şi de rază r.

Avem $|z-1-i| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow M(z) \in D\left((1,1),\sqrt{2}\right)$ .... $(1p)$

şi $|z-3+i| \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow M(z) \in C\left((3,-1),\sqrt{2}\right) \cup \text{Ext}\left(D\left((3,-1),\sqrt{2}\right)\right)$ .... $(1p)$

Deoarece $|(3-i)-(1+i)| = 2\sqrt{2}$, rezultă că cercurile $C\left((1,1),\sqrt{2}\right)$ şi $C\left((3,-1),\sqrt{2}\right)$ sunt tangente exterior în punctul $A(2,0)$, ... $(2p)$

iar din $|z-3+i| = |z-1-i|$, rezultă că punctul $M(z)$ se află pe mediatoarea segmentului determinat de centrele cercurilor $C\left((1,1),\sqrt{2}\right)$ şi $C\left((3,-1),\sqrt{2}\right)$ .... $(2p)$

Aşadar, soluţia sistemului este $z = 2$.. $(1p)$

PROBLEMA 2. Considerăm mulţimea $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset \mathbb{C}^* \ (n \geq 2)$ cu proprietatea că $a_i \cdot a_j \in M$, pentru orice $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

a) Să se arate că $M = U_n$, unde $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$;

b) Să se determine numărul de elemente ale mulţimii $\{f(x) \mid x \in [0,1]\}$, unde $f : [0,1] \to \mathbb{C}$, este funcţia definită prin $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^{[n \cdot x]}$.

Barem de corectare.

a) Deoarece pentru orice $a \in M$, are loc $\{a \cdot a_1, a \cdot a_2, ..., a \cdot a_n\} = M$, obţinem că $a^n = 1$, de unde rezultă că $M = U_n$. .... $(2p)$

b) Pentru $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$ avem: $[nx] = 0 \Rightarrow f(x) = n$, iar pentru $x = 1$, avem $f(1) = n$ ..... (2p)

Deoarece $M = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{n-1}\}$, unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, pentru $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$ $(k \in \{1, 2, ..., n-1\})$ avem: $[nx] = k \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^k = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^{ik} = \frac{1 - \left(\varepsilon^k\right)^n}{1 - \varepsilon^k} = 0$...... (2p)

Deci $f(x) = \begin{cases} n, & \text{dacă } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right) \cup \{1\} \\ 0, & \text{dacă } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right) \end{cases}$, de unde rezultă că mulţimea $\{f(x) \mid x \in [0,1]\}$ are două elemente. .... (1p)

PROBLEMA 3. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = 2^x - 2^{-x}$.

a) Să se arate că funcţia f este bijectivă şi să se determine inversa ei f^{-1};

b) Să se determine soluţiile întregi ale ecuaţiei $2^x - 2^{-x} = \log_2 \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$.

Barem de corectare.

a) Deoarece pentru orice $y \in \mathbb{R}$, ecuaţia $f(x) = y$ are soluţia unică $x = \log_2 \frac{y + \sqrt{y^2+4}}{2}$ (2p)

rezultă că funcţia f este inversabilă, deci bijectivă. Inversa ei este funcţia $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f^{-1}(x) = \log_2 \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$.. (1p)

b) Deoarece graficele funcţiilor f şi f^{-1} sunt simetrice faţă de prima bisectoare, ecuaţia $f(x) = f^{-1}(x)$ este echivalentă cu $f(x) = x$ .... (2p)

Pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}^*$, avem $2^n \geq n + 1$, adică $\begin{cases} f(n) > n \\ f(-n) = -f(n) < -n \end{cases}$.

Cum $f(0) = 0$, rezultă că $x = 0$ este singura soluţie din $\mathbb{Z}$ a ecuaţiei.................. (2p)

PROBLEMA 4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\frac{a^{x^2}}{b^{2x}} + \frac{b^{x^2}}{a^{2x}} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$, unde $a, b > 1$.

Barem de corectare.

Dacă $a = b$, atunci ecuaţia devine $2a^{x^2-2x} = 2a^{-1}$, cu soluţia unică $x = 1$. .... (3p)

Dacă $a \neq b$, atunci $2(ab)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{ab}} = \frac{a^{x^2+2x} + b^{x^2+2x}}{(ab)^{2x}} > \frac{2\sqrt{(ab)^{x^2+2x}}}{(ab)^{2x}} = 2(ab)^{\frac{x^2-2x}{2}}$ ...... (2p)

de unde, cum $ab > 1$, obţinem că $-\frac{1}{2} > \frac{x^2-2x}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2 < 0$, ceea ce este imposibil .. (2p)

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 17. 02. 2018
BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI – a

PROBLEMA 1. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{Q})$ astfel încât $\det\left(\sqrt{2}A + B\right) = \det\left(A + B\sqrt{3}\right) = 0$. Demonstraţi că:

a) $\det A = \dfrac{1}{2}\left[(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\right]$;

b) $\det A = \det B$;

c) $\operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(A \cdot B)$.

Barem de corectare.

a) Relaţia cerută se poate obţine prin calcul direct, sau din Teorema lui Cayley-Hamilton avem $A^2 = \operatorname{tr}(A) \cdot A - (\det A) \cdot I_2 \Rightarrow \operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(A) \cdot \operatorname{tr}(A) - 2 \cdot (\det A)$, de unde concluzia. . (2p)

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Din $\det\,(\sqrt{2}A + B) = 0$ obţinem

$$(2 \cdot \det A + \det B) + \sqrt{2}\,(at + xd - bz - yc) = 0 \qquad (1)$$

Deoarece $A, B \in M_2(\mathbb{Q})$, rezultă că $2 \cdot \det A + \det B = 0$. . . . . (1$p$)

Analog, $\det A + 3 \cdot \det B = 0$. . . . . (1$p$)

În concluzie, $\det A = \det B = 0$. . . . . (1p)

c) Deoarece $\operatorname{tr}(AB) = ax + bz + cy + dt$ şi $\operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B = ax + at + dx + dt$, ... (1p)

iar din relaţia (1) avem că $at + dx = bz + cy$, obţinem concluzia. . . . . (1p)

PROBLEMA 2. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ astfel încât $A^2 + A + I_n = O_n$. Aflaţi n, ştiind că $\det(A^n + I_n) = 2^{2016}$.

Barem de corectare.

Folosind relaţia dată obţinem $A^3 = I_n$, deci $\det A = 1$. . . . . (2p)

Deci $A^n = I_n$, dacă $n = 3k$, $A^n = A$, dacă $n = 3k+1$ şi $A^n = A^2$, dacă $n = 3k+2$. . . . . . (1p)

Dacă $n = 3k$, atunci $\det(A^n + I_n) = \det(2I_n) = 2^n$ . . . . (1p)

Dacă $n = 3k+1$, atunci $\det(A^n + I_n) = \det(A + I_n) = \det(-A^2) = (-1)^n$. . . . . (1p)

Dacă $n = 3k+2$, atunci $\det(A^n + I_n) = \det(A^2 + I_n) = \det(-A) = (-1)^n$. . . . . (1p)

Singurul caz care convine este $n = 3k$ şi deoarece 2016 este divizibil cu 3, avem $n = 2016$ singura soluţie . . . . (1p)

PROBLEMA 3. Fie $a \in (0,1)$. Definim şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, prin $x_0 > 0$ şi $x_n = a^2 + a + \sqrt{x_{n-1}} - 2a\sqrt{a+\sqrt{x_{n-1}}}$, $n \geq 1$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi să se determine limita sa.

Barem de corectare.

Avem $x_n = \left(\sqrt{a+\sqrt{x_{n-1}}} - a\right)^2 > 0$ pentru orice $n \geq 1$... (1p)

Putem defini şirul $(y_n)_{n\geq 0}$, prin $y_n = \sqrt{x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Relaţia de recurenţă devine $y_n^2 = (\sqrt{a+y_{n-1}} - a)^2$ şi deoarece $y_n > 0$, pentru orice $n \geq 1$, obţinem $y_n = \sqrt{a+y_{n-1}} - a$, pentru orice $n \geq 1$... (1p)

Avem (1) $\quad y_n - y_{n-1} = \sqrt{a+y_{n-1}}\,(1 - \sqrt{a+y_{n-1}})$ pentru orice $n \geq 1$... (1p)

Avem următoarele cazuri:

1. dacă $y_0 < 1-a$, atunci (se demonstreză prin inducţie) $y_n < 1-a$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, deci şirul $(y_n)_{n\geq 0}$ este mărginit; Din (1) obţinem că şirul $(y_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător, deci convergent... (1p)
2. dacă $y_0 > 1-a$, atunci $y_n > 1-a$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, deci şirul$(y_n)_{n\geq 0}$ este mărginit inferior. Din (1) rezultă că şirul $(y_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător, deci convergent... (1p)
3. dacă $y_0 = 1-a$, atunci $y_n = 1-a$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, deci este convergent, cu limita $1-a$....(1p)

Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1-a$, de unde rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = (1-a)^2$... (1p)

PROBLEMA 4.

a) Aflaţi parametrii $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{an^2+bn+c} - n - 2\right) = 2018$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(n\pi\sqrt[3]{n^3+3n^2+5n-2}\right)$.

Barem de corectare.

a) Notăm $L(a,b,c) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{an^2+bn+c} - n - 2\right)$

$$L(a,b,c) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(an^2+bn+c-(n+2)^2\right)}{\sqrt{an^2+bn+c}+n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a-1)n^2+(b-4)n+(c-4)}{\sqrt{a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}}+1+\frac{2}{n}} \ldots (2p)$$

Deci $L(a,b,c) = 2018 \Leftrightarrow a = 1,\ b = 4$ şi $c = 4040$... (1p)

b) Dacă $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(n\pi\sqrt[3]{n^3+3n^2+5n-2}\right)$, atunci

$$L = \lim_{n\to\infty} \sin\left(n\pi\sqrt[3]{n^3+3n^2+5n-2} - n(n+1)\pi\right) \ldots (1p)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin\left(n\pi\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+5n-2} - (n+1)\right)\right) \ldots (1p)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n(2n-3)\pi}{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+5n-2}\right)^2 + (n+1)\sqrt[3]{n^3+3n^2+5n-2} + (n+1)^2}\right) \ldots (1p)$$

$$= \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ldots (1p)$$

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 17. 02. 2018
BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Fie $(G, \cdot)$ un grup, iar H_1, H_2 şi H trei subgrupuri ale sale. Să se arate că:

a) $H_1 \cap H_2$ este subgrup al lui G;

b) $H_1 \cup H_2$ este subgrup al lui G, dacă şi numai dacă $H_1 \subseteq H_2$ sau $H_2 \subseteq H_1$;

c) $H \subseteq H_1 \cup H_2$, dacă şi numai dacă $H \subseteq H_1$ sau $H \subseteq H_2$.

Barem de corectare.

a) Dacă e este elementul neutru al grupului G, atunci $e \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$. Dacă $x, y \in H_1 \cap H_2$, atunci $\begin{cases} x, y \in H_1 \\ x, y \in H_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot y^{-1} \in H_1 \\ x \cdot y^{-1} \in H_2 \end{cases} \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in H_1 \cap H_2$. Deci $H_1 \cap H_2$ este subgrup al lui G; .... $(1p)$

b) Evident, dacă $H_1 \subseteq H_2$ sau $H_2 \subseteq H_1$, atunci $H_1 \cup H_2 \leq G$.

Dacă $H_1 \nsubseteq H_2$ şi $H_2 \nsubseteq H_1$, atunci există $x_1 \in H_1 \setminus H_2$ şi $x_2 \in H_2 \setminus H_1$. Deoarece $H_1 \cup H_2 \leq G$, avem $x_1 \cdot x_2 \in H_1 \cup H_2$, adică $x_1 \cdot x_2 \in H_1$ sau $x_1 \cdot x_2 \in H_2$, de unde obţinem că $x_2 \in H_1$ sau $x_1 \in H_2$, ceea ce contrazice ipoteza. .... $(3p)$

c) Evident, dacă $H \subseteq H_1$ sau $H \subseteq H_2$, atunci $H \subseteq H_1 \cup H_2$. Dacă $H \nsubseteq H_1$ şi $H \nsubseteq H_2$, atunci există $x \in H \setminus H_1$ şi $y \in H \setminus H_2$. Aşadar, $x \cdot y \in H \Rightarrow x \cdot y \in H \setminus (H_1 \cup H_2) \Rightarrow H \nsubseteq H_1 \cup H_2$, contradicţie.. .... $(3p)$

PROBLEMA 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $x, y \in G$, astfel încât $x^2 = y^2 = (xy)^2$. Arătaţi că $x^{2020} = y^{2020} = e$, unde e este elementul neutru al grupului.

Barem de corectare.

Din $x^2 = (xy)^2$ şi $y^2 = (xy)^2$, obţinem că $x = yxy$ şi $y = xyx$. .... $(2p)$

Deci $xy = yxy \cdot xyx = y(xy)^2 x = y^3 x = y^3 \cdot yxy = y^4 \cdot xy$ .... $(2p)$

de unde, $y^4 = e$ .... $(1p)$

Analog, se arată că $x^4 = e$. .... $(1p)$

Aşadar, $x^{2020} = y^{2020} = e$. .... $(1p)$

PROBLEMA 3. Să se calculeze $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\{x\}}{\sin x}dx$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

Barem de corectare.

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\{x\}}{\sin x}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x}{\sin x}dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{[x]}{\sin x}dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1p)$$

Notăm: $I_1 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x}{\sin x}dx$ şi $I_2 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{[x]}{\sin x}dx$.

$$I_1 \overset{x=\pi-t}{=} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\pi - t}{\sin t}dt = \pi \ln 3 - I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{\pi}{2}\ln 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3p)$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{2} \frac{1}{\sin x}dx + \int_{2}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{2}{\sin x}dx = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{2} - 2\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{2}^{\frac{2\pi}{3}} = -\ln\frac{\operatorname{tg}1}{2\sqrt{3}} \ldots\ldots (2p)$$

Aşadar, $I = I_1 - I_2 = \dfrac{\pi}{2}\ln 3 + \ln\dfrac{\operatorname{tg}1}{2\sqrt{3}}$ .... (1p)

PROBLEMA 4. Să se determine funcţiile integrabile $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x) - \int_0^1 (x+y)\cdot f(y)dy = x,\ \forall\, x \in [0;1].$$

Barem de corectare.

Relaţia din enunţ se scrie echivalent $f(x) = \left(\displaystyle\int_0^1 f(y)dy + 1\right)\cdot x + \displaystyle\int_0^1 y\cdot f(y)dy$ ...... (3p)

Deci, functia f are forma $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ .... (2p)

Din condiţia dată, se obţine $a = -6$ şi $b = -4$, adică $f(x) = -6x - 4$.................. (2p)

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.